

Essay Semifinal

1. Buktikan bahwa

$2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$
dapat dibagi 1897 untuk setiap bilangan asli n .

2. Selesaikan persamaan berikut !

$$\sqrt{x + 4418 - 94\sqrt{x + 2209}} + \sqrt{x + 4513 - 96\sqrt{x + 2209}} = 1$$

3. Misalkan G adalah titik berat dari segitiga ABC . Garis h melalui G memotong sisi-sisi BC , CA , dan AB masing-masing di titik A_1 , B_1 dan C_1 . Misalkan L adalah suatu titik yang terletak dalam segitiga ABC dan sekaligus terletak pada garis h . Hitunglah nilai dari

$$\frac{LA_1}{A_1G} + \frac{LB_1}{B_1G} + \frac{LC_1}{C_1G}.$$

Pembahasan Soal Essay

1. Buktikan bahwa

$2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$
dapat dibagi 1897 untuk setiap bilangan asli n .

Pembahasan :

Untuk setiap bilangan bulat x dan y dengan $x - y \neq 0$ dan bilangan asli n , pandang pempfaktoran berikut :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Jelas bahwa $x^n - y^n$ dapat dibagi oleh $(x - y)$.

Dari soal jelas bahwa $2903^n - 803^n$ dapat dibagi oleh $2903 - 803 = 2100 = 7 \cdot 300$, dan suku sisanya yakni $261^n - 464^n$ dapat dibagi oleh $261 - 464 = -203 = 7(-29)$. Sehingga, bilangan $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ dapat dibagi oleh 7 untuk setiap bilangan asli n .

Selain itu, $2903^n - 464^n$ dapat dibagi oleh $2903 - 464 = 2439 = 9 \cdot 271$ dan $261^n - 803^n$ dapat dibagi oleh $261 - 803 = -542 = (-2) \cdot 271$. Sehingga, bilangan $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ dapat dibagi oleh 271 untuk setiap bilangan asli n .

Karena $FPB(7, 271) = 1$ maka $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ dapat dibagi oleh $7 \cdot 271 = 1897$ untuk setiap bilangan asli n .

2. Tentukan semua penyelesaian bilangan real x dari persamaan berikut!

$$\sqrt{x + 4418 - 94\sqrt{x + 2209}} + \sqrt{x + 4513 - 96\sqrt{x + 2209}} = 1.$$

Pembahasan :

Misalkan $u = \sqrt{x + 2209} = \sqrt{x + 47^2}$. Sehingga, persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} & \sqrt{x + 4418 - 94\sqrt{x + 2209}} + \sqrt{x + 4513 - 96\sqrt{x + 2209}} = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x + 47^2) + 47^2 - 2 \cdot 47 \cdot \sqrt{x + 47^2}} + \sqrt{(x + 47^2) + 48^2 - 2 \cdot 48 \cdot \sqrt{(x + 47^2)}} \\ & = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{u^2 + 47^2 - 2 \cdot 47 \cdot u} + \sqrt{u^2 + 48^2 - 2 \cdot 48 \cdot u} = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(u - 47)^2} + \sqrt{(u - 48)^2} = 1 \\ \Leftrightarrow & |u - 47| + |u - 48| = 1. \end{aligned}$$

(Ingat bahwa hasil dari penarikan akar kuadrat selalu positif, sehingga nilai dari $\sqrt{x} = |x|$, dimana $|x|$ adalah harga mutlak dari x).

Karena $|u - 47| \geq 0$ maka

$$\begin{aligned} 1 - |u - 48| & \geq 0 \\ \Leftrightarrow |u - 48| & \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 & \leq u - 48 \leq 1 \\ \Leftrightarrow 47 & \leq u \leq 49. \end{aligned}$$

Demikian pula, karena $|u - 48| \geq 0$ maka

$$\begin{aligned} 1 - |u - 47| & \geq 0 \\ \Leftrightarrow |u - 47| & \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 & \leq u - 47 \leq 1 \\ \Leftrightarrow 46 & \leq u \leq 48. \end{aligned}$$

Karena $47 \leq u \leq 49$ dan $46 \leq u \leq 48$ maka u akan terletak pada interval

$$47 \leq u \leq 48.$$

Substitusikan $u = \sqrt{x + 2209}$ pada interval u untuk memperoleh

$$\begin{aligned} 47 & \leq \sqrt{x + 2209} \leq 48 \\ 2209 & \leq x + 2209 \leq 2304 \\ 0 & \leq x \leq 95. \end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $0 \leq x \leq 95$.